

1. Nekonečné řady.

1. Vyšetřete absolutní, případně neabsolutní konvergenci řady:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}); \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{1}{n}.$$

2. V závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$ vyšetřete, zda konverguje absolutně, resp. konverguje neabsolutně, resp. diverguje řada

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} (x-2)^n; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n}{n^2+1} (x+1)^n; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2^n(n+1)} (x-3)^n;$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad e) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; \quad f) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

2. Limita funkce.

1. Z definice limity ukažte:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} (3x-2) = 4; \quad b) \lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} = 0; \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty; \quad d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

2. Necht' funkce f je neklesající a omezená v intervalu (a, b) . Dokažte, že pak pro libovolné $c \in (a, b)$ existují vlastní limity $\lim_{x \rightarrow c+} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow c-} f(x)$; co lze říci o oboustranné limitě $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$?

3. Ukažte, že platí:

$$(i) \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$$

$$(ii) \text{ Je-li } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \text{ a funkce } g(x) \text{ je omezená v nějakém prstencovém okolí bodu } c, \text{ pak i } \lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = 0.$$

4. Vypočítejte limity, nebo ukažte, že neexistují:

$$a) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-1}{(x+3)^2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(x+3)^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+1}{x^2-1}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-1}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{1-x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4x-5}{(x-1)^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3-x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{3-x^2};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x}); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - x);$$

$$c) (\text{limita složené funkce}) \lim_{x \rightarrow 3} \exp\left(\frac{1}{3-x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp\left(\frac{1}{3-x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \exp\left(\frac{1}{x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow ?} \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right);$$

$$\lim_{x \rightarrow ?} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}};$$

d) Víme-li, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, spočítejte limity (nebo ukažte, že neexistují):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin \sqrt{x}}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{\sin(x+1)}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{x}{\sin x}\right);$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(2 + \sin x);$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \cos x); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \sin x.$$